IL MINIMO TEORICO

TUTTO QUELLO CHE DOVETE SAPERE PER FARE DELLA (BUONA) FISICA

LEONARD SUSSKIND
GEORGE HRABOVSKY

Traduzione di Giuseppe Bozzi

Le Scienze

codice
EDIZIONI

Leonard Susskind e George Hrabovsky
Il minimo teorico
Tutto quello che dovete sapere per fare della (buona) fisica

Titolo originale
The Theoretical Minimum
What You Need to Know to Start Doing Physics

Progetto grafico: Limiteazero + Cristina Chiappini
Redazione: Francesco Rossa
Impaginazione: Asintoto
Coordinamento produttivo: Enrico Casadei

ISBN 978-887578-400-3

codiceedizioni.it
facebook.com/codiceedizioni
twitter.com/codiceedizioni
pinterest.com/codiceedizioni

Alle nostre mogli, che hanno scelto di sopportarci, e agli studenti dei corsi di formazione continua del professor Susskind

Indice

Prefazione

Mi è sempre piaciuto *spiegare* la fisica. Per me è molto più che insegnare: è un'attitudine mentale. Persino quando sono alla scrivania per fare ricerca, nella mia mente il dialogo è incessante. D'altronde penso che trovare il modo migliore per spiegare qualcosa sia quasi sempre anche il miglior modo per comprenderla.

Una decina di anni fa qualcuno mi chiese se avrei voluto tenere un corso "per non addetti ai lavori". Come in molti altri luoghi, anche nell'area di Stanford c'era un gran numero di persone che un tempo volevano studiare fisica, ma che poi la vita aveva portato altrove. Avevano avuto le carriere lavorative più disparate, ma non avevano mai dimenticato l'amore di un tempo per le leggi dell'universo. Ora, con alle spalle percorsi diversi, volevano tornare a quella vecchia passione, almeno a un livello base.

Sfortunatamente per queste persone non c'erano molte occasioni di seguire corsi. Di solito Stanford e altre università non ammettono esterni a seguire i corsi, e per molti tornare tra i banchi come studenti a tempo pieno non è un'opzione accettabile. Questo non mi piaceva: doveva pur esserci un modo per consentire a queste persone di approfondire i propri interessi interagendo con i ricercatori. Apparentemente non era così.

Fu allora che venni a sapere del Continuing Studies Program dell'università di Stanford, un programma che offre corsi per la comunità non accademica locale. Pensai che avrebbe potuto essermi utile trovare qualcuno a cui spiegare la fisica, e che sarebbe stato divertente tenere un corso di fisica moderna. Inoltre, si trattava solo di un trimestre. In effetti fu divertente, e fu gratificante in una misura in cui l'insegnamento a laureandi e dottorandi a volte non è. Questi studenti non erano lì per guadagnare crediti, ottenere un titolo di studio o essere testati. Il loro scopo era solo uno: imparare, soddisfacendo la propria sete di conoscenza. Per di più, trattandosi di persone abbastanza "navigate", non erano per nulla intimoriti dal fare domande; la classe possedeva una carica vitale che di solito le classi accademiche non hanno. Così decisi di farlo ancora. E ancora.

Dopo un paio di trimestri mi fu chiaro che gli studenti non erano del tutto soddisfatti del corso "per l'uomo della strada" che stavo fornendo loro: volevano qualcosa in più dello "Scientific American". Molti di loro avevano un bagaglio di conoscenze scientifiche, nozioni di calcolo arrugginite ma ancora presenti, nonché una certa esperienza nel risolvere problemi tecnici. Erano pronti a cimentarsi con la fisica vera, *quella con le formule*. Il risultato fu una serie di corsi mirati ad accompagnare questi studenti alle frontiere della fisica e della cosmologia moderne.

Fortunatamente qualcuno (non io) ebbe la brillante idea di filmare le lezioni, che quindi sono disponibili su internet. Pare che siano estremamente popolari: Stanford non è l'unico posto dove ci sono persone che vogliono imparare la fisica. Una delle domande che mi sono state poste con maggiore frequenza nelle molte e-mail che ho ricevuto è questa: quelle lezioni sarebbero mai diventate una serie di libri? *Il minimo teorico* è la risposta.

Non ho coniato io l'espressione *minimo teorico*, a farlo è stato il grande fisico russo Lev Landau. In Russia il minimo teorico è tutto ciò che uno studente doveva sapere per lavorare con Landau stesso, il quale era un uomo molto esigente: il suo minimo teorico era "semplicemente" tutto ciò che egli sapeva, e che nessun altro realisticamente avrebbe potuto sapere.

Io uso questa espressione in maniera diversa: per me il minimo teorico è ciò che bisogna sapere per passare al livello successivo. Non significa grossi libri di testo enciclopedici che esauriscono la materia, ma volumetti che spiegano tutto ciò che è essenziale. I libri seguono i corsi che trovate sul web.

Benvenuti dunque a *Il minimo teorico*, e buona fortuna!

Leonard Susskind, Stanford, California, luglio 2012

Ho cominciato a studiare matematica e fisica da autodidatta, all'età di undici anni, quarant'anni fa. Sono successe molte cose da allora: faccio parte di quella schiera di persone che la vita ha portato su altri lidi. Comunque, di matematica e fisica ne ho studiata parecchia; e nonostante sia pagato per fare ricerca, non ho mai conseguito una laurea.

Questo libro ha avuto inizio con un'e-mail. Dopo aver visto le lezioni che costituiscono la base del libro, ho scritto a Leonard Susskind chiedendogli se avrebbe voluto trasformarle in un libro. Da cosa nasce cosa… ed eccoci qui.

Non abbiamo potuto inserire nel libro tutto ciò che volevamo, altrimenti non si chiamerebbe *Il minimo teorico* ma sarebbe un Grande-E-Grosso-Libro-Di-Meccanica. Dopo tutto è questo lo scopo di internet: assorbire una grande quantità di larghezza di banda per rendere disponibile ciò che non trova posto da altre parti! Troverete materiale aggiuntivo all'indirizzo www.madscitech.org/tm, oltre a risposte ai quesiti, dimostrazioni e altre cose che non siamo riusciti a includere nelle pagine di questo volume.

Spero sarà piacevole per voi leggere questo libro almeno quanto per noi è stato scriverlo.

George Hrabovsky, Madison, Wisconsin, luglio 2012

Il minimo teorico

Lezione 1

L'essenza della fisica classica

Da qualche parte, nel paese di Steinbeck, due uomini stanchi siedono sul ciglio di una strada.
Lenny si pettina la barba con le dita e dice: «Parlami delle leggi della fisica, George».
George guarda in basso per un po', poi scruta Lenny da sopra la montatura degli occhiali. «Va bene, Lenny, ma solo il minimo necessario».

Che cos'è la fisica classica?

L'espressione *fisica classica* si riferisce alla fisica prima dell'arrivo della meccanica quantistica. La fisica classica include le equazioni di Newton per il moto delle particelle, la teoria di Maxwell-Faraday dei campi elettromagnetici e la teoria della relatività generale di Einstein, ma è molto più di una collezione di specifiche teorie per fenomeni specifici: si tratta di una serie di principi e regole – una "logica di fondo", potremmo dire – che governa tutti i fenomeni in cui l'incertezza quantistica non è essenziale. Queste regole generali sono chiamate *meccanica classica*.

Il compito della meccanica classica è predire il futuro. Pierre-Simon Laplace lo dichiarò in questo famoso passaggio del suo *Saggio filosofico sulle probabilità*:

> Possiamo guardare allo stato presente dell'universo come effetto del suo passato e causa del suo futuro. Un'intelligenza che conoscesse a un determinato istante tutte le forze che pongono la natura in movimento e tutte le posizioni di tutti gli oggetti di cui la natura è composta, se tale intelligenza fosse anche abbastanza estesa da analizzare tali dati, ricondurrebbe a una singola formula i movimenti dei più grandi corpi dell'universo e dei più piccoli atomi; per una tale intelligenza niente sarebbe incerto e il futuro, così come il passato, sarebbe presente ai suoi occhi.

Nella fisica classica, se si conosce tutto di un sistema a un certo istante temporale e si conoscono anche le equazioni che ne governano il cambiamento, si può predire il futuro. È ciò che intendiamo quando diciamo che le leggi classiche della fisica sono *deterministiche*. Se possiamo dire la stessa cosa, ma scambiando il futuro con il passato, allora le stesse equazioni ci dicono tutto degli eventi passati. Un tale sistema è detto *reversibile*.

Sistemi dinamici semplici e spazio degli stati

Una collezione di oggetti (particelle, campi, onde o altro) è definita *sistema*. Un sistema che coincida con l'intero universo, o che sia talmente isolato dal resto da comportarsi come se il resto non esistesse, è detto *sistema chiuso*.

ESERCIZIO 1

Dal momento che questo concetto è molto importante in fisica teorica, pensa a cosa può essere un sistema chiuso e cerca di immaginare se un sistema chiuso possa davvero esistere. Quali assunzioni implicite sono necessarie per definire un sistema chiuso? Che cos'è un sistema aperto?

Per avere un'idea di cosa significhino i termini *deterministico* e *reversibile*, cominceremo con alcuni sistemi chiusi molto semplici. Si tratta di sistemi molto più semplici di ciò che realmente studiamo in fisica, ma soddisfano regole che sono versioni rudimentali delle leggi della meccanica classica.

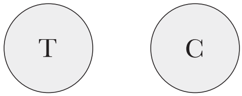

Figura 1. Lo spazio a due stati.

Cominciamo con un esempio talmente semplice da essere banale. Immaginiamo un oggetto astratto che abbia un unico stato. Possiamo pensare a una moneta incollata su un tavolo che mostra sempre testa. In termini fisici, la collezione di tutti gli stati occupati da un sistema è il suo *spazio degli stati*. Lo spazio degli stati non è uno spazio ordinario: è un insieme matematico i cui elementi identificano tutti i possibili stati del sistema. In questo caso lo spazio degli stati consiste di un singolo punto – testa (T), per la precisione – poiché il sistema ha un solo stato. Predire il futuro di questo sistema è molto semplice: non succederà nulla e il risultato di qualsiasi osservazione sarà sempre T.

Il sistema più semplice successivo ha uno spazio degli stati che consiste di due punti. In questo caso abbiamo un oggetto astratto e due possibili stati. Immaginiamo una moneta che può essere testa o croce (T o C; vedi la Figura 1).

In meccanica classica assumiamo che i sistemi evolvano con regolarità, senza salti o interruzioni. Un comportamento di questo tipo è detto *continuo*. Ovviamente non si può passare da testa a croce in modo continuo. In questo caso il movimento si compie attraverso salti discreti. Assumiamo dunque che il tempo sia diviso in unità discrete definite da numeri interi. Un mondo la cui evoluzione sia discreta può essere chiamato *stroboscopico*.

Un sistema che cambia con il passare del tempo è detto *sistema dinamico*, ed è più di uno spazio degli stati: include anche una *legge del moto*, o *legge dinamica*. La legge dinamica è una regola che predice il prossimo stato a partire da quello attuale.

Una legge dinamica molto semplice è quella secondo cui, per qualsiasi stato a un determinato istante, il successivo è lo stesso. Nel nostro esempio, abbiamo due possibili evoluzioni: T T T T T T … e C C C C C C ….

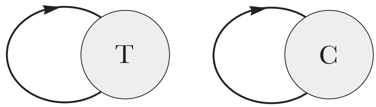

Figura 2. Una legge dinamica per un sistema a due stati.

Un'altra legge dinamica stabilisce che, per qualsiasi stato iniziale, il successivo è quello opposto. Possiamo rappresentare queste due leggi tramite diagrammi. La Figura 2 illustra la prima legge, dove la freccia da T va a T e quella da C va a C. Ancora una volta, è facile predire il futuro: se si comincia con T, il sistema resta in T; se si comincia con C, il sistema resta in C.

Un diagramma per la seconda legge è mostrato nella Figura 3, dove le frecce vanno da T a C e da C a T, e si può di nuovo predire il futuro. Ad esempio, partendo da T, l'evoluzione sarà T C T C T C T C T C .... Partendo da C invece, l'evoluzione sarà C T C T C T C T C T ....

Possiamo persino scrivere queste leggi dinamiche sotto forma di equazioni. Le variabili che descrivono un sistema sono chiamate *gradi di libertà*. La nostra moneta ha un grado di libertà, che possiamo indicare con la lettera greca sigma, σ. Sigma ha solo due possibili valori: $\sigma = 1$ e $\sigma = -1$, rispettivamente per T e C. Si usa un simbolo anche per lo scorrere del tempo: quando consideriamo un'evoluzione continua nel tempo, possiamo usare il simbolo t. Poiché qui abbiamo un'evoluzione discreta, useremo n. Lo stato al tempo n è descritto dal simbolo $\sigma(n)$, che sta per σ al tempo n. I valori possibili di n sono dati dalla sequenza dei numeri naturali, a partire da $n = 1$.

Scriviamo le equazioni dell'evoluzione per le due leggi. La prima legge dice che nessun cambiamento interviene. In forma di equazione,

$$\sigma(n+1) = \sigma(n)$$

In altre parole, qualsiasi valore assuma σ al passo n-esimo, avrà lo stesso valore al passo successivo.

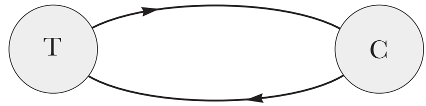

Figura 3. Un'altra legge dinamica per un sistema a due stati.

La seconda equazione di evoluzione ha la forma

$$\sigma(n+1) = -\sigma(n)$$

il che implica che lo stato si inverte ad ogni passo.

Poiché in ogni caso il comportamento futuro è completamente determinato dallo stato iniziale, tali leggi sono deterministiche. Tutte le leggi fondamentali della meccanica classica lo sono.

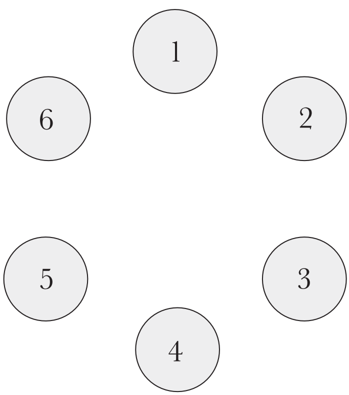

Figura 4. Un sistema a sei stati.

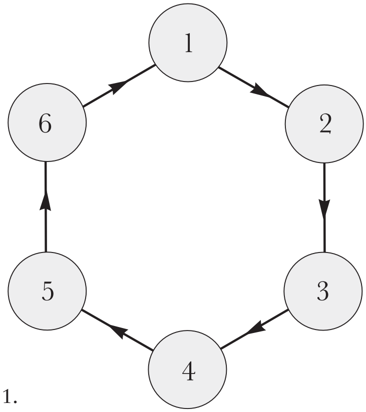

Figura 5. Legge dinamica 1.

Per rendere le cose più interessanti, generalizziamo il sistema aumentando il numero degli stati. Invece di una moneta, potremmo usare un dado a sei facce, con sei stati possibili (vedi la Figura 4).

Ora c'è un gran numero di leggi possibili e queste non sono facili da descrivere a parole né per mezzo di equazioni. Il modo più semplice è fare ricorso ai diagrammi, come nella Figura 5. La figura dice che, dato lo stato numerico del dado al tempo n, al tempo $n + 1$ si incrementa lo stato di una unità. Si procede in questo modo fino ad arrivare al 6, e a quel punto si torna indietro al numero 1 e si ripete la procedura. Un simile schema, che si ripete senza fine, è definito *ciclo*. Per esempio, se cominciamo con il numero 3, l'evoluzione sarà 3, 4, 5, 6, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 1, 2, ... Chiameremo questa procedura legge dinamica 1.

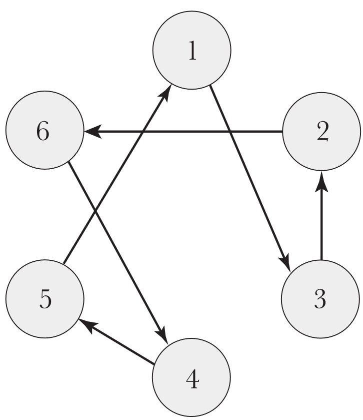

Figura 6. Legge dinamica 2.

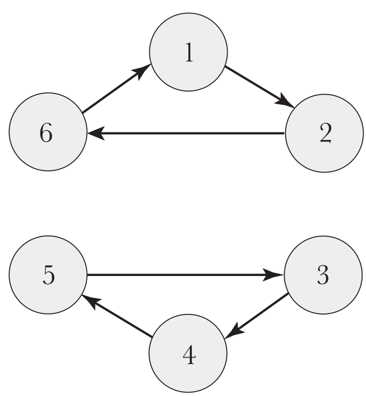

Figura 7. Legge dinamica 3.

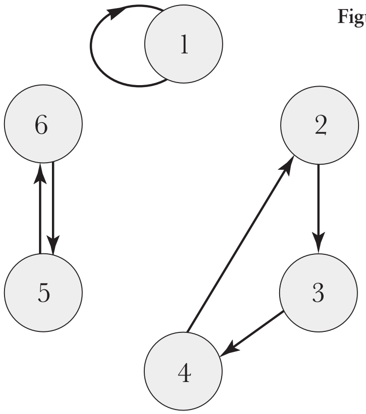

Figura 8. Legge dinamica 4.

La Figura 6 mostra un'altra legge, la legge dinamica 2. Sembra un po' più confusa rispetto alla precedente, ma è logicamente identica: in entrambi i casi il sistema percorre in sequenza i sei possibili stati. Se rinominiamo gli stati, la legge dinamica 2 diventa uguale alla legge dinamica 1.

Non tutte le leggi sono logicamente identiche. Consideriamo, per esempio, la legge mostrata nella Figura 7: la legge dinamica 3 ha due cicli; se si inizia su uno dei due, non c'è modo di passare all'altro; nondimeno la legge è ancora completamente deterministica. Qualunque sia lo stato iniziale, il futuro è determinato. Per esempio, se si parte dal numero 2, l'evoluzione sarà 2, 6, 1, 2, 6, 1, … e non si arriverà mai al 5. Se si parte dal 5 l'evoluzione sarà 5, 3, 4, 5, 3, 4, … e non si arriverà mai al 6.

La Figura 8 illustra la legge dinamica 4, con tre cicli.

Ci vorrebbe molto tempo per scrivere tutte le possibili leggi dinamiche per un sistema a sei stati.

ESERCIZIO 2

Puoi immaginare un modo generale per classificare tutte le possibili leggi di un sistema a sei stati?

Regole non permesse: la legge "ante-prima"

Secondo le regole della fisica classica non tutte le leggi sono ammesse. Per una legge dinamica non è sufficiente essere deterministica: deve essere anche reversibile.

Il significato di *reversibile* – in ambito fisico – può essere illustrato in diversi modi. La descrizione più concisa dice che, se si invertono tutte le frecce, la legge risultante è ancora deterministica. Un'altra possibilità è dire che *le leggi sono deterministiche sia per il passato sia per il futuro*. Ricordiamo la citazione di Laplace, «per una tale intelligenza niente sarebbe incerto e il futuro, così come il passato, sarebbe presente ai suoi occhi». Si possono immaginare leggi deterministiche per il futuro, ma non per il passato? In altre parole, possiamo formulare leggi irreversibili? In effetti, si può: consideriamo la Figura 9.

La legge della Figura 9 dice dove andare, a partire da qualsiasi punto. Dallo stato 1 si va al 2, dal 2 si va al 3, dal 3 si va al 2. Non c'è ambiguità rispetto al futuro ma rispetto al passato le cose vanno diversamente. Supponiamo di essere allo stato 2: dove eravamo prima di arrivare lì? Potremmo essere arrivati dallo stato 3 o dallo stato 1. Il diagramma non ci fornisce questa informazione. E, ancora peggio in termini di reversibilità, non c'è

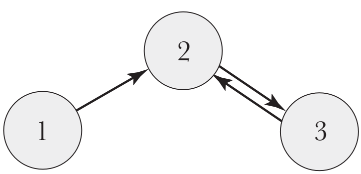

Figura 9. Un sistema irreversibile.

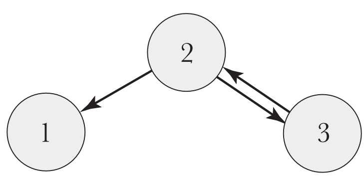

Figura 10. Un sistema non deterministico per il futuro.

alcuno stato che porti allo stato 1: lo stato 1 non ha passato. La legge della Figura 9 è *irreversibile*, e illustra esattamente il tipo di situazione proibita dai principi della fisica classica.

Notiamo che se invertiamo le frecce nella Figura 9, ottenendo la Figura 10, la legge corrispondente fallisce nel predire il futuro.

C'è una regola molto semplice per stabilire se un diagramma rappresenta una legge deterministica reversibile. Se ogni stato ha una e una sola freccia entrante in esso, e una e una sola freccia uscente da esso, allora si tratta di una legge deterministica reversibile. Per dirla in un altro modo: ci deve essere una freccia per dirti dove andare e una per dirti da dove vieni.

La regola secondo cui le leggi dinamiche devono essere deterministiche e reversibili è così essenziale per la fisica classica che a volte dimentichiamo di menzionarla quando insegniamo questa materia, e in realtà non ha neanche un nome. Potremmo chiamarla "prima legge", ma sfortunatamente ci sono già due "prime leggi" (quella di Newton e la prima legge della termodinamica); c'è persino una legge zero della termodinamica. Dunque dobbiamo ricorrere a una legge "ante-prima" per dare priorità a quella che è indubbiamente la più fondamentale tra tutte le leggi fisiche: *la conservazione dell'informazione*. La conservazione dell'informazione è semplicemente la regola secondo cui ogni stato ha una sola freccia entrante e una sola freccia uscente, e assicura che non si perda mai l'informazione sullo stato di partenza.

La conservazione dell'informazione non è una legge di conservazione convenzionale. Torneremo sulle leggi di conservazione dopo una digressione sui sistemi con numero infinito di stati.

Sistemi dinamici con un numero infinito di stati

Finora i nostri esempi avevano spazi con un numero finito di stati, ma non c'è ragione per cui non si possano avere sistemi dinamici con un numero infinito di stati. Immaginiamo, per esempio, una linea con un numero infinito di punti su di essa, come una linea ferroviaria con una sequenza infinita di stazioni in en-

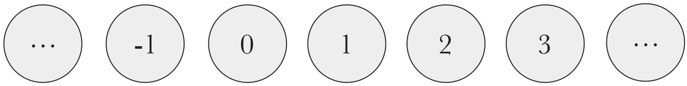

Figura 11. Spazio degli stati per un sistema infinito.

trambe le direzioni. Supponiamo che un indicatore di qualche tipo possa saltare da un punto all'altro secondo una determinata regola. Per descrivere un sistema di questo tipo possiamo denotare i punti lungo la linea usando numeri interi, allo stesso modo in cui in precedenza abbiamo denotato gli istanti di tempo discreti. Poiché abbiamo già utilizzato n per i passi temporali discreti, utilizziamo ora la lettera maiuscola N per i punti sul percorso. L'evoluzione dell'indicatore è data dalla funzione $N(n)$, che fornisce il punto N lungo il percorso ad ogni istante n. Una piccola porzione di questo spazio degli stati è mostrata nella Figura 11.

Una legge dinamica molto semplice per questo sistema, mostrata nella Figura 12, è traslare l'indicatore di un'unità nella direzione positiva ad ogni passo temporale.

Ciò è permesso dal momento che ogni stato ha una sola freccia entrante e una sola uscente. Possiamo facilmente esprimere questa regola in forma di equazione:

$$N(n+1) = N(n) + 1 \tag{1}$$

Ecco altre regole possibili, ma non tutte sono permesse.

$$N(n+1) = N(n) - 1 \tag{2}$$

$$N(n+1) = N(n) + 2 \tag{3}$$

$$N(n+1) = N(n)^2 \tag{4}$$

$$N(n+1) = -1^{N(n)} N(n) \tag{5}$$

ESERCIZIO 3

Determina quali delle leggi dinamiche mostrate nelle Equazioni 2, 3, 4 e 5 sono permesse.

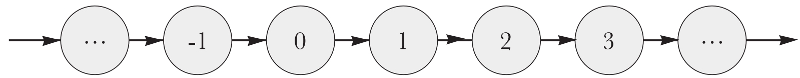

Figura 12. Una legge dinamica per un sistema infinito.

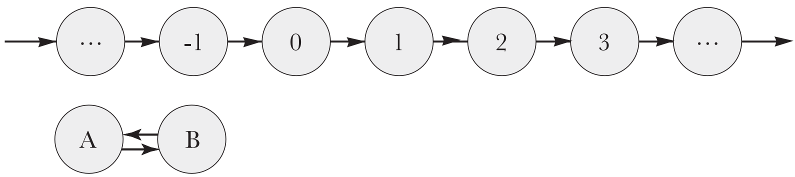

Figura 13. Separazione di uno spazio infinito di configurazioni in cicli finiti e infiniti.

Con l'Equazione 1, ovunque si cominci, si finirà con l'arrivare in tutti gli altri punti sia andando nel futuro sia andando nel passato. In questo caso diciamo che c'è un singolo ciclo infinito. Con l'Equazione 3, invece, partendo da un valore dispari di N non si arriverà mai a uno pari, e viceversa. In questo caso abbiamo due cicli infiniti.

Possiamo anche aggiungere al sistema stati qualitativamente diversi per creare altri cicli, come mostrato nella Figura 13.

Se partiamo da un numero, allora procederemo lungo la linea superiore, come nella Figura 12. Se invece partiamo da A o da B, allora compiremo un ciclo tra questi due stati. Possiamo quindi avere situazioni in cui percorriamo cicli su alcuni stati, oppure ci muoviamo all'infinito su altri.

Cicli e leggi di conservazione

Quando lo spazio degli stati è scomposto in più cicli, il sistema resta nel ciclo da cui parte. Ogni ciclo ha la sua legge dinamica, ma fanno tutti parte dello stesso spazio degli stati dal momento che descrivono lo stesso sistema dinamico. Consideriamo un sistema

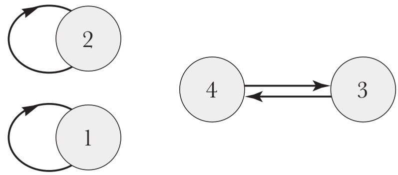

Figura 14. Separazione di uno spazio degli stati in cicli.

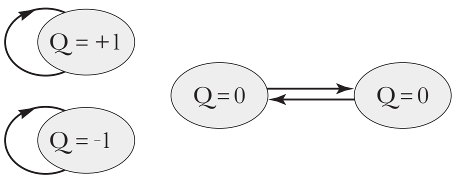

Figura 15. Cicli denotati con valori specifici di una quantità conservata.

con tre cicli. Ognuno degli stati 1 e 2 appartiene al proprio ciclo, mentre il 3 e il 4 appartengono al terzo ciclo (vedi la Figura 14).

Ogni volta che una legge dinamica divide lo spazio degli stati in cicli separati, resta memoria del ciclo da cui si è partiti. Tale memoria è chiamata *legge di conservazione*: ci dice che qualcosa resta costante ad ogni istante temporale. Per rendere quantitativa la legge di conservazione, assegniamo ad ogni ciclo un valore numerico Q. Nell'esempio della Figura 15, ai tre cicli sono assegnati i valori $Q = +1$, $Q = -1$ e $Q = 0$. Qualunque sia il valore di Q, resta lo stesso ad ogni istante temporale poiché la legge dinamica non permette il salto da un ciclo all'altro. Detto più semplicemente, Q si conserva.

Nei capitoli successivi affronteremo il problema del movimento continuo, in cui sia il tempo sia lo spazio degli stati sono continui. Tutte le proprietà che abbiamo analizzato per i sistemi semplici discreti hanno il loro analogo nel caso di sistemi più realistici, ma ci vorranno diversi capitoli prima di vedere le cose all'opera.

I limiti della precisione

Laplace probabilmente è stato troppo ottimista riguardo alla predicibilità del mondo, anche limitandosi alla fisica classica. Di certo sarebbe stato d'accordo sul fatto che la predizione del futuro richiede una conoscenza perfetta delle leggi dinamiche che governano il mondo e una straordinaria potenza di calcolo, ossia quella che lui chiamava un'intelligenza «abbastanza estesa da analizzare tali dati». C'è tuttavia un altro elemento che potrebbe aver sottostimato: la possibilità di conoscere le condizioni iniziali con precisione quasi assoluta. Immaginiamo un dado con un milione di facce, ognuna delle quali etichettata con un simbolo in apparenza simile agli usuali numeri interi a singola cifra ma in realtà con sottilissime differenze, di modo che esistano un milione di etichette diverse. Se si conoscesse la legge dinamica e se fossimo capaci di riconoscere l'etichetta di partenza, si potrebbe determinare l'evoluzione futura del dado. Tuttavia, qualora l'intelligenza postulata da Laplace soffrisse di un leggero difetto di vista e non fosse capace di distinguere le diverse etichette, la sua capacità predittiva sarebbe limitata.

Nel mondo reale è anche peggio. Lo spazio degli stati non ha solamente un numero enorme di punti: è infinito in maniera continua. In altre parole, è etichettato da una collezione di numeri reali, come per esempio le coordinate delle particelle. I numeri reali sono così densi che ognuno di essi è arbitrariamente vicino a infiniti altri numeri reali. La capacità di distinguere numeri così vicini tra loro è il «potere risolutivo» di ogni esperimento, che per ogni osservatore reale è limitato. In linea di principio, non possiamo conoscere le condizioni iniziali con infinita precisione: nella maggior parte dei casi, minime differenze nelle condizioni iniziali – lo stato iniziale – portano a grandi differenze nei risultati finali. Questo fenomeno è chiamato *caos*. Se un sistema è caotico (e la maggior parte dei sistemi lo è) ciò implica che, anche con un buon potere risolutivo, il tempo su cui il sistema è predicibile è limitato. La predicibilità perfetta non è raggiungibile, semplicemente perché siamo limitati dal potere risolutivo.

Interludio 1

Spazi, trigonometria e vettori

«Dove siamo, George?».
George tirò fuori la sua mappa e la mise davanti a Lenny. «Siamo qui, Lenny: coordinate 36,60709 latitudine Nord, -121,618652 longitudine Ovest».
«Eh? Che cos'è una coordinata, George?».

Coordinate

Per descrivere i punti in maniera quantitativa, abbiamo bisogno di un sistema di coordinate. La costruzione di questo sistema comincia assegnando a un punto dello spazio il ruolo di *origine*. A volte l'origine è scelta in modo da semplificare le equazioni. Ad esempio, la teoria del sistema solare apparirebbe più complicata se ponessimo l'origine in un punto diverso dal centro del Sole. Per essere precisi, la scelta è arbitraria – qualsiasi punto è lecito – ma, una volta presa la decisione, è necessario attenersi ad essa.

Il prossimo passo consiste nel fissare tre assi perpendicolari: anche in questo caso la scelta è arbitraria, purché siano perpendicolari tra di loro. Gli assi sono di solito chiamati x, y e z, ma possiamo anche chiamarli x_1, x_2 e x_3. Un tale sistema di assi è detto *sistema di coordinate cartesiane* (vedi la Figura 1).

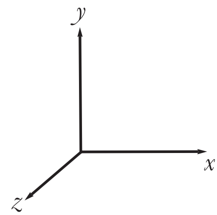

Figura 1. Un sistema di coordinate cartesiane in tre dimensioni.

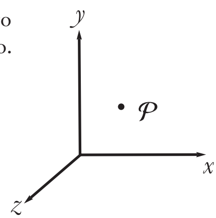

Figura 2. Un punto nello spazio cartesiano.

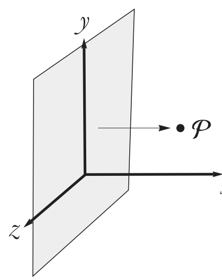

Figura 3. Un piano definito ponendo $x = 0$, e la distanza da P lungo l'asse x.

Volendo descrivere un determinato punto P dello spazio, possiamo fornirne le coordinate x, y e z. In altre parole, possiamo individuare il punto P con la tripletta ordinata di numeri (x, y, z) (vedi la Figura 2).

La coordinata x rappresenta la distanza di P dal piano definito dall'equazione $x = 0$ (Figura 3). Analogamente si definiscono le coordinate y e z. Poiché le coordinate rappresentano distanze, sono misurate in unità di lunghezza, per esempio in metri.

Nello studio del moto bisogna considerare anche il tempo: definiamo anche in questo caso un'origine, lo zero temporale. Potremmo scegliere come origine il Big Bang, la nascita di Gesù

Cristo o l'inizio di un esperimento, ma, una volta scelta, non bisogna cambiarla.

Poi è necessario definire una direzione temporale: per convenzione si sceglie il futuro come direzione positiva del tempo, mentre quella negativa rappresenta il passato. Potremmo decidere di scegliere la convenzione opposta, ma non lo faremo.

Infine abbiamo bisogno di un'unità di misura per indicare il tempo. Il secondo è l'unità di misura abituale per i fisici ma ore, nanosecondi o anni andrebbero ugualmente bene. Una volta scelte l'origine e l'unità di misura, possiamo denotare ogni istante temporale con un numero t.

In meccanica classica si fanno due assunzioni implicite riguardo al tempo. La prima è che scorra uniformemente (un intervallo di un secondo ha lo stesso significato ad ogni istante temporale). Per esempio, un peso che cade oggi dalla Torre di Pisa impiega lo stesso numero di secondi che ci vollero al tempo di Galileo. La seconda assunzione è che si possano confrontare i tempi relativi a posizioni spaziali differenti. Ciò significa che orologi collocati in posti diversi possono essere sincronizzati.

Date queste assunzioni, le quattro coordinate – x, y, z e t – definiscono un *sistema di riferimento*: ad ogni evento nel sistema di riferimento è assegnato un valore per ciascuna delle quattro coordinate.

Data la funzione $f(t) = t^2$, possiamo disegnarne i punti in un sistema di coordinate: useremo un asse per il tempo, t, e un altro per la funzione, $f(t)$ (vedi la Figura 4).

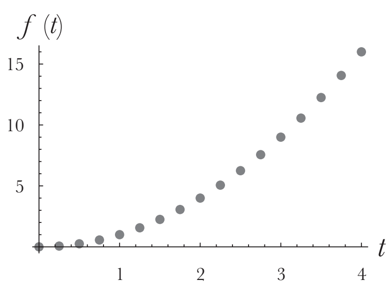

Figura 4. Rappresentazione dei punti della funzione $f(t) = t^2$.

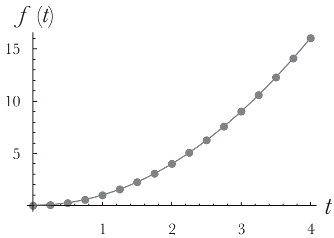

Figura 5. Unione dei punti tramite linee curve.

Possiamo anche collegare i punti con delle curve per riempire gli spazi tra l'uno e l'altro (vedi la Figura 5).

In questo modo otteniamo una rappresentazione grafica delle funzioni.

ESERCIZIO 1

Con l'aiuto di una calcolatrice grafica o di un programma come *Mathematica*, rappresenta graficamente le seguenti funzioni. Se non conosci o non ricordi le funzioni trigonometriche, leggi prima il prossimo paragrafo.

$$\begin{aligned} f(t) &= t^4 + 3t^3 - 12t^2 + t - 6 \\ g(x) &= \sin(x) - \cos(x) \\ \theta(\alpha) &= e^\alpha + \alpha \ln \alpha \\ x(t) &= \sin^2(t) - \cos(t) \end{aligned}$$

Trigonometria

Se non hai studiato trigonometria, o se l'hai studiata molto tempo fa, questo paragrafo fa al caso tuo.

In fisica la trigonometria si usa di continuo: è ovunque. Bisogna dunque familiarizzare con i concetti, simboli e metodi usati più di frequente. Per cominciare, in fisica normalmente non si usano i gradi come unità di misura degli angoli. Si usano invece i *radianti*: diciamo che 2π radianti equivalgono a 360°, oppure che 1 radiante = 180°/π, 90° = $\pi/2$ radianti, 30° = $\pi/6$ radianti. Dunque un radiante equivale a circa 57° (vedi la Figura 6).

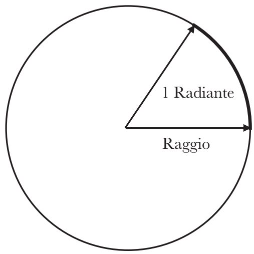

Figura 6. Il radiante come angolo sotteso da un arco di lunghezza pari al raggio della circonferenza.

Le funzioni trigonometriche sono definite facendo riferimento alle proprietà dei triangoli rettangoli. La Figura 7 mostra un triangolo rettangolo di ipotenusa *c*, base *b* e altezza *a*. Con la lettera greca θ denotiamo l'angolo opposto all'altezza *a*, mentre con la lettera greca ϕ denotiamo l'angolo opposto alla base *b*.

Definiamo le funzioni seno (sin), coseno (cos) e tangente (tan) come rapporti tra i lati, mediante le seguenti relazioni:

$$\sin\theta = \frac{a}{c}$$

$$\cos\theta = \frac{b}{c}$$

$$\tan\theta = \frac{a}{b} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

Possiamo rappresentare queste funzioni tramite un grafico per vedere il loro andamento (vedi le Figure 8, 9 e 10).

Ci sono alcune utili proprietà delle funzioni trigonometriche che è bene conoscere. La prima è che possiamo disegnare un triangolo all'interno di una circonferenza avente come centro l'origine di un sistema di coordinate cartesiane (vedi la Figura 11).

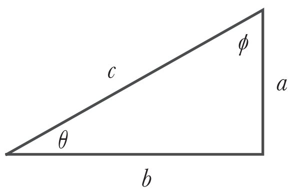

Figura 7. Un triangolo rettangolo con lati e angoli definiti nel testo.

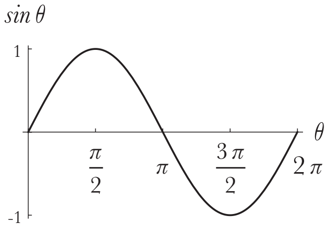

Figura 8. Grafico della funzione seno.

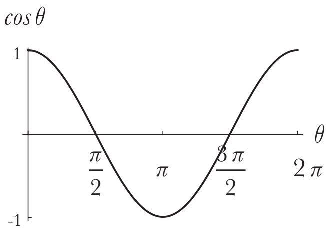

Figura 9. Grafico della funzione coseno.

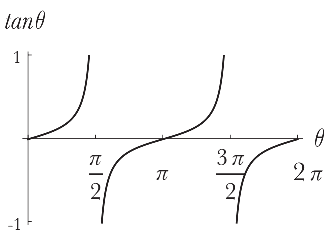

Figura 10. Grafico della funzione tangente.

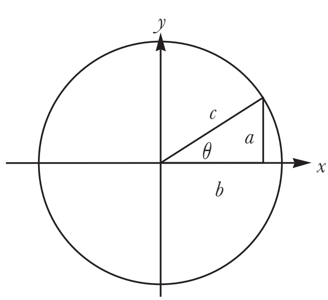

Figura 11. Un triangolo rettangolo disegnato all'interno di una circonferenza.

Il segmento che collega l'origine con qualsiasi punto della circonferenza è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo che ha come base e altezza rispettivamente le componenti orizzontale e verticale di tale punto. La posizione di un punto sulla circonferenza può essere dunque specificata tramite due coordinate, x e y, dove

$$x = c \cos\theta$$

e

$$y = c \sin\theta$$

Si tratta di una relazione molto utile fra triangoli rettangoli e circonferenze.

Supponiamo ora che un certo angolo θ sia la somma o la differenza di altri due angoli α e β: possiamo dunque scrivere l'angolo θ come $\alpha \pm \beta$. Le funzioni trigonometriche di $\alpha \pm \beta$ possono essere espresse nei termini delle funzioni trigonometriche di α e β.

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \\
\sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \\
\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\
\cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta
\end{aligned}$$

Un'ultima – e utilissima – identità è

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \tag{1}$$

(La notazione qui usata è: $\sin^2\theta = \sin\theta \sin\theta$.) Questa equazione è il teorema di Pitagora sotto altra forma. Se poniamo il raggio della circonferenza della Figura 11 pari a 1, i lati a e b sono il seno e il coseno dell'angolo θ e l'ipotenusa vale 1. L'Equazione 1 è dunque la relazione familiare tra i lati di un triangolo rettangolo: $a^2 + b^2 = c^2$.

Vettori

La notazione vettoriale è un altro argomento matematico che diamo per assodato ma, al fine di uniformare il livello di partenza, ripasseremo le tecniche di calcolo vettoriale nello spazio ordinario tridimensionale.

Un *vettore* può essere pensato come un oggetto che ha sia una lunghezza (o *modulo*) sia una direzione nello spazio. Un esempio è il vettore spostamento. Se un oggetto è spostato da un determinato punto di partenza nello spazio, non basta conoscere di quanto è spostato per sapere dove andrà a finire. Bisogna anche conoscere la direzione dello spostamento. Lo spostamento è l'esempio più semplice di quantità vettoriale. Graficamente, un vettore è raffigurato tramite una freccia con lunghezza e direzione fissate, come mostrato dalla Figura 12.

I vettori sono rappresentati mediante una freccia posizionata al di sopra della lettera: lo spostamento si denota dunque con $\vec{r}$. Il modulo, o lunghezza, di un vettore è espresso tramite il simbolo del valore assoluto. Il modulo di $\vec{r}$ si denota dunque con $|\vec{r}|$.

Vediamo ora alcune operazioni che possiamo fare con i vettori. Per prima cosa, è possibile moltiplicarli per numeri reali ordinari. Quando si lavora con i vettori, i numeri reali ordinari prendono spesso il nome di *scalari*. La moltiplicazione per un numero positivo ha come effetto la semplice moltiplicazione del modulo del vettore per quel numero. Moltiplicando per un numero negativo si inverte la direzione del vettore nello spazio. Ad esempio $-2\vec{r}$ è il vettore lungo due volte $\vec{r}$, ma che punta nella direzione opposta.

I vettori possono anche essere sommati. Per sommare $\vec{A}$ e $\vec{B}$, disponiamoli come nella Figura 13 a formare un quadrilatero (in modo che le direzioni dei vettori restino inalterate). La somma dei vettori è il vettore avente direzione e lunghezza della diagonale del parallelogramma.

Se i vettori possono essere sommati e moltiplicati con numeri negativi, allora possono essere anche sottratti.

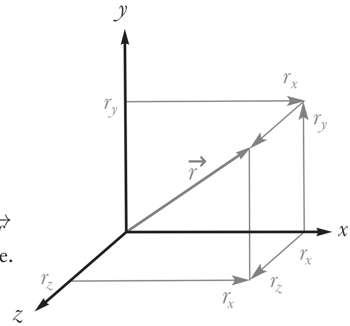

Figura 12. Un vettore $\overrightarrow{r}$ in coordinate cartesiane.

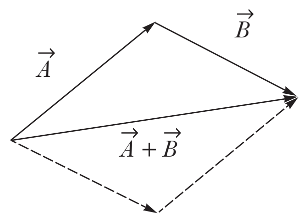

Figura 13. Somma di vettori.

ESERCIZIO 2

Deduci la regola di sottrazione per i vettori.

I vettori possono anche essere descritti tramite le loro componenti. Cominciamo con il fissare tre assi perpendicolari x, y e z. Definiamo in seguito tre *vettori unitari* disposti lungo questi assi e che abbiano modulo 1. I vettori unitari disposti lungo gli assi coordinati si chiamano *vettori di base*. I tre vettori di base per le coordinate cartesiane sono di solito indicati con $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$, $\hat{k}$ (vedi la Figura 14). Più in generale scriviamo $\hat{e_1}$, $\hat{e_2}$, $\hat{e_3}$ quando ci riferiamo a (x_1, x_2, x_3), dove l'accento circonflesso ^ indica che stiamo considerando vettori unitari. I vettori di base sono utili perché qualsiasi vettore $\overrightarrow{V}$ può essere scritto nel seguente modo:

$$\overrightarrow{V} = V_x\hat{\imath} + V_y\hat{\jmath} + V_z\hat{k} \tag{2}$$

Le quantità V_x, V_y e V_z sono i coefficienti numerici da moltiplicare ai vettori di base per ottenere $\overrightarrow{V}$ e sono chiamate *compo-*

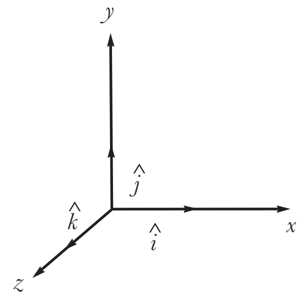

Figura 14. Somma di vettori.

nenti di $\vec{V}$. Si dice che l'Equazione 2 è una *combinazione lineare* dei vettori di base: è un'espressione elaborata per dire che stiamo sommando i vettori di base, moltiplicati per opportuni fattori numerici. Possiamo anche scrivere un vettore come elenco delle sue componenti, in questo caso (V_x, V_y, V_z). Il modulo di un vettore può essere espresso nei termini delle sue componenti, applicando il teorema di Pitagora nello spazio tridimensionale.

$$|\vec{V}| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} \tag{3}$$

Moltiplicare un vettore V per uno scalare α vuol dire moltiplicare per α ciascuna delle componenti.

$$\alpha\vec{V} = (\alpha V_x, \alpha V_y, \alpha V_z)$$

Possiamo scrivere la somma di due vettori come somma delle rispettive componenti.

$$(\vec{A} + \vec{B})_x = (A_x + B_x)$$
$$(\vec{A} + \vec{B})_y = (A_y + B_y)$$
$$(\vec{A} + \vec{B})_z = (A_z + B_z)$$

Possiamo anche moltiplicare vettori? Sì, è possibile farlo in più di un modo. Un tipo di prodotto – il prodotto vettoriale – fornisce un altro vettore. Per il momento non ci occuperemo del prodotto vettoriale e considereremo solo l'altro metodo, il *prodotto scalare*. Per i vettori $\vec{A}$ e $\vec{B}$ è definito come segue:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}| \cos\theta$$

dove θ è l'angolo tra i due vettori. In parole povere il prodotto scalare è il prodotto dei moduli dei due vettori e del coseno dell'angolo compreso.

Il prodotto scalare può anche essere definito nei termini delle componenti:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

Questo rende semplice il calcolo, una volta note le componenti dei vettori.

ESERCIZIO 3

Mostra che il modulo di un vettore soddisfa la seguente proprietà

$$|\vec{A}|^2 = \vec{A} \cdot \vec{A}$$

ESERCIZIO 4

Siano dati i due vettori ($A_x = 2$, $A_y = -3$, $A_z = 1$) e ($B_x = -4$, $B_y = -3$, $B_z = 2$). Calcola il modulo di $\vec{A}$ e $\vec{B}$, il loro prodotto scalare e l'angolo da essi formato.

Una proprietà importante del prodotto scalare è che si annulla se i vettori sono *ortogonali* (perpendicolari). Ricordati di questa proprietà perché avremo modo di usarla per dimostrare che due vettori sono ortogonali.

ESERCIZIO 5

Determina quali coppie di vettori sono ortogonali: (1, 1, 1), (2, -1, 3), (3, 1, 0), (-3, 0, 2).

ESERCIZIO 6

Riesci a spiegare perché il prodotto scalare di due vettori ortogonali è 0?