NUMERI

TUTTO QUELLO CHE CONTA DA ZERO A INFINITO

Claudio Bartocci
Luigi Civalleri

codice EDIZIONI

palazzo delle esposizioni

NUMERI
TUTTO QUELLO CHE CONTA DA ZERO A INFINITO

Roma, Palazzo delle Esposizioni
16 ottobre 2014 – 31 maggio 2015

Sotto l'Alto Patronato del Presidente della Repubblica
Giorgio Napolitano

A cura di Claudio Bartocci
Coordinamento scientifico di Luigi Civalleri

Comitato scientifico
Giovanni Filocamo, didattica e rapporto con le neuroscienze
Alessandro Languasco, crittografia
Valeriano Lanza, musica e matematica
Alberto Perelli, teoria dei numeri

ROMA CAPITALE
Assessorato alla Cultura, Creatività e Promozione Artistica

azienda speciale PALAEXPO

Co-organizzatore
codice
Idee per la cultura

Roma Capitale
Sindaco
Ignazio R. Marino

Assessore alla Cultura, Creatività e Promozione Artistica
Giovanna Marinelli

Azienda Speciale Palaexpo
Palazzo delle Esposizioni

Presidente
Franco Bernabè

Direttore Generale
Mario De Simoni

Consiglio d'Amministrazione
Claudia Ferrazzi
Silvana Novelli
Claudio Strinati
Lorenzo Zichichi

Collegio dei Revisori dei conti
Presidente
Sergio Basile

Revisori
Annamaria Carpineta
Clementina Chieffo

Responsabile delle attività scientifiche e culturali
Matteo Lafranconi

Project Team

Direttore operativo
Daniela Picconi

Responsabile ufficio organizzazione mostre
Flaminia Bonino

Responsabile ufficio tecnico e progettazione
Francesca Elvira Ercole

Responsabile cataloghi e archivio iconografico
Flaminia Nardone

Registrar per la mostra
Francesca Rachele Oppedisano

Direttore area amministrazione e controllo di gestione
Fabio Merosi

Direttore area affari legali
Andrea Landolina

Senior curator
Daniela Lancioni

Responsabile comunicazione e immagine
Luisa Ammaniti

Responsabile promozione e customer care
Chiara Guerraggio

Ufficio stampa
Piergiorgio Paris

Responsabile programmazione cinema e auditorium
Marco Berti

Responsabile ICT
Davide Dino Novara

Responsabile eventi, coordinamento segreteria e attività di staff della direzione generale
Barbara Guerrini

Responsabile affari generali
Rossella Longobardi

Responsabile servizi di accoglienza
Teresa Marzicola

Responsabile bookshop e servizi aggiuntivi
Marcello Pezza

Visita in mostra e laboratorio per famiglie e scuole dell'infanzia e primarie
Servizi educativi, formazione e didattica

Sperimentazioni e visite guidate per le scuole secondarie
Società Cooperativa Culture

Grafica Azienda Speciale Palaexpo
Alfredo Favi – Arkè

INTRODUZIONE

Tanto sono onnipresenti nella nostra vita che tendiamo spesso a non accorgercene, o a sottovalutare la loro importanza. Talvolta risultano quasi invisibili, perlomeno all'occhio non esercitato, proprio perché sono troppo in evidenza, come la lettera rubata del celebre racconto di Edgar Allan Poe. Stiamo parlando dei numeri.

Misure di tutti i generi, probabilità e statistiche, indici finanziari, prezzi, rapporti, tassi, costanti di accoppiamento, esponenti caratteristici, cardinali e ordinali: i numeri sono ovunque. Anche coloro che li detestano – non di rado in conseguenza di esperienze scolastiche più o meno traumatizzanti – non possono rinunciare a servirsene, consapevolmente o meno, in ogni minimo atto dell'esistenza quotidiana.

In quanto strumento di conoscenza, e dunque di potere, i numeri non sono utilizzati soltanto per delucidare la realtà delle cose, rendendo più accurati e imparziali i nostri ragionamenti, ma anche per manipolare e occultare i fatti. Ignorarli con un'alzata di spalle indebolisce le nostre capacità di valutazione critica e mette a repentaglio i nostri fondamentali diritti di scelta e di autodeterminazione. Come hanno sottolineato vari autorevoli studiosi, l'analfabetismo numerico – *innumeracy*, in inglese – è un ostacolo serio al pieno sviluppo della democrazia.

I numeri non costituiscono solo l'ingrediente di base di ogni discorso scientificamente fondato. Fin dalle epoche più remote e in tutte le culture, essi sono carichi di significati simbolici, magici o religiosi: racchiudono in sé un'arcana bellezza, esprimono equilibrio e armonia, promanano un'enigmatica malia. La musica, le arti, l'architettura parlano, seppur talvolta sottovoce, il linguaggio del numero, così come la poesia, «quel parlare – scrive Dante nel *Convivio* – che in numeri e tempo regolato in rimate consonanze cade»

La natura dei numeri, è pur vero, ci sfugge. Sono il messaggio segreto di una qualche divinità creatrice – che filosofi e matematici, da secoli, si sforzano invano di decifrare? Oppure la materia prima della tessitura del mondo, come credevano i Pitagorici? Hanno una loro esistenza assoluta, o sono soltanto una nostra costruzione mentale, una convenzione linguistica, forse addirittura una mera finzione?

I neonati di pochi mesi, così come mostrano un'innata abilità a riconoscere i volti umani o a distinguere gli oggetti materiali dalle loro ombre, danno prova di precisissime capacità numeriche: sanno distinguere 2 da 3, indipendentemente dal fatto che si tratti di sonagli, di orsetti di peluche o di ciucciotti, e riescono a fare semplici operazioni aritmetiche. Questa facoltà non verbale di stimare il numero degli oggetti di un insieme e di confrontare il numero degli oggetti di due o più insiemi distinti non è prerogativa esclusiva di *Homo sapiens* ma è condivisa anche con altre specie animali. Numerosi studi hanno infatti dimostrato che galline e piccioni sono in grado di "contare" e di confrontare tra loro numeri anche abbastanza grandi, che i ratti si possono addestrare a eseguire addizioni come 1 + 1 = 2 o 2 + 2 = 4 e che gli scimpanzé più dotati (come il famoso Nim) riescono addirittura a cavarsela anche alle prese con le frazioni.

Per noi esseri umani, come ha osservato Stanislas Dehaene, sembra che la conoscenza delle regole di base dell'aritmetica «sia veramente infusa, codificata nell'architettura stessa del nostro cervello, e che non aspetti altro che il sorgere della capacità di memoria a breve termine, verso i quattro mesi, per rivelarsi». Da questo punto di vista, i numeri non sono meno concreti del colore rosso delle ciliegie, del profumo delle rose, della sensazione di freddo che proviamo al contatto con un blocco di ghiaccio. Esito di un lunghissimo processo evolutivo durato milioni di anni, essi costituiscono una imprescindibile modalità della nostra interazione con la mutevole e sfuggente realtà – una realtà che consiste di onde elettromagnetiche, di nugoli di atomi agglomerati in molecole più o meno instabili, di campi gravitazionali, di scambi di energia.

Proprio per questa ragione fondamentalmente darwiniana, la mente umana mostra chiare limitazioni a trattare numeri eccessivamente grandi, che esulano dai confini della nostra esperienza e, come scriveva il matematico René Thom, «danno un po' le vertigini». Chi è in grado di valutare a occhio il numero di granelli di sabbia di una qualsiasi spiaggia, o di figurarsi in modo chiaro e distinto le sconfinate distanze che separano le stelle, o di immaginare concretamente 100 miliardi di euro in monetine da 5 centesimi? In realtà, per fare un esempio terra terra, è già impossibile dare una stima accurata del numero di fagioli contenuti in un grosso barattolo. Da ciò consegue la facilità con cui gli esseri umani sono soggetti a illusioni cognitive o, più banalmente, a farsi gabbare quando siano in gioco numeri grandissimi.

I numeri, tuttavia, hanno anche un carattere astratto. In altre parole, hanno – o sembrano avere – una loro vita segreta, che appare indipendente dalle nostre strutture neuronali: sono elusivi e capricciosi.

I numeri naturali (1, 2, 3, ...) sembrano scevri da ogni mistero: la loro successione nasconde però regolarità e irregolarità spesso difficili da decifrare. All'interno di questa successione si annidano altre sequenze – i numeri triangolari, i numeri di Fibonacci, i numeri di Catalan, i numeri di Lucas, tanto per fare qualche esempio – le cui proprietà riproducono curiosamente strutture aritmetiche combinatorie che si possono ritrovare anche nel mondo naturale. Tra queste sequenze quella di gran lunga più interessante è quella dei numeri primi – quei numeri, cioè, maggiori di uno, che non si possono ottenere moltiplicando due numeri più piccoli: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17...

Già Euclide aveva dimostrato, nel libro IX degli *Elementi*, che la «molteplicità» dei primi è più grande di una qualsiasi molteplicità assegnata: come diciamo oggi, essi sono infiniti. Tuttavia, via via che diventano più grandi, i numeri primi si fanno via via più radi: come si può verificare anche sperimentalmente, la distanza tra due primi consecutivi tende, statisticamente, ad aumentare sempre di più. Ma qual è la legge secondo cui sono distribuiti? È vero che ogni numero si può scrivere come somma di due primi (congettura di Goldbach)? Esistono infinite coppie di primi la cui differenza è uguale a due? Le congetture e le speculazioni in questo campo sono probabilmente più numerose che in qualsiasi altro settore della matematica, e i problemi irrisolti impegnano, da secoli, schiere di ricercatori. Come ebbe modo di osservare il grande matematico inglese Godfrey Harold Hardy, «qualsiasi sciocco può porre questioni sui numeri primi alle quali il più saggio degli uomini non sa rispondere».

E non ci sono soltanto i numeri naturali o i numeri frazionari. Già ai matematici babilonesi era noto – come mostra una famosa tavoletta in caratteri cuneiformi (Yale Babylonian Collection 7289) – che il rapporto tra il lato e la diagonale di un quadrato non può essere espresso come rapporto tra numeri interi. Il pensiero greco classico elaborò una sofisticata teoria delle grandezze incommensurabili, il cui acme è rappresentato dal libro X degli *Elementi* euclidei.

Numeri irrazionali che godono di celebrità e importanza assai speciali sono pi greco (π), che esprime il rapporto tra il raggio e la semicirconferenza, e il numero *e*, che è la base dei logaritmi naturali. Se già i babilonesi e gli egiziani facevano uso di approssimazioni di π sufficientemente precise per gli scopi pratici, fu gloria di Archimede mettere a punto un procedimento per il calcolo rigoroso di questa quantità, facendo uso di una geniale costruzione geometrica basata sul raddoppio dei lati dei poligoni inscritti e circoscritti a una circonferenza. Il metodo di Archimede, recepito e tramandato dai matematici arabi, fu impiegato, all'inizio del XV secolo, da al-Kāshi ("colui che calcola come le aquile volano") per ottenere un'approssimazione di π esatta fino alla sedicesima cifra decimale.

Il numero *e*, oggi onnipresente in ogni settore della scienza, fa invece la sua comparsa nel corso del Seicento, nel corso del lento sviluppo del concetto di *logaritmo* e in stretta relazione con il problema di quadratura dell'iperbole. L'irrazionalità di *e* e di π venne dimostrata, rispettivamente, da Euler e da Johann Lambert nel XVIII secolo; nella seconda metà dell'Ottocento si provò inoltre che essi sono entrambi numeri trascendenti, cioè che non sono soluzioni di nessuna equazioni algebrica. In particolare, la dimostrazione della trascendenza di π – ottenuta da Carl Louis Ferdinand Lindemann nel 1882 – pose definitivamente termine all'antico problema della quadratura del cerchio, stabilendo la sua insolubilità.

Gli sviluppi dell'algebra, nei secoli XVI e XVII, portarono all'introduzione di nuove specie di numeri: i numeri negativi e i numeri immaginari. A proposito di questi ultimi si accesero vivaci polemiche sia tra i matematici, sia tra i filosofi. Sono soltanto quantità «sofistiche» e «fittizie», come le chiamava Cardano, o hanno un'esistenza non dissimile da quella di tutti gli altri numeri? All'inizio del Settecento Leibniz, riferendosi all'unità immaginaria (quella grandezza, cioè, il cui quadrato è uguale a –1), la definisce «mostro del mondo ideale, quasi anfibio tra l'essere e il non essere». Pochi decenni più tardi, Euler, incurante delle diatribe filosofiche, maneggerà con disinvolta maestria i numeri complessi, ponendo così le basi dell'analisi matematica moderna.

Lo scenario concettuale muterà drasticamente nel corso dell'Ottocento, un secolo ricchissimo di nuove idee matematiche. Bolzano, Dedekind, Weierstrass, Méray e Cantor propongono definizioni formali e rigorose dei numeri reali, che comprendono tanto gli interi e i numeri frazionari quanto gli irrazionali e che sono posti in corrispondenza biunivoca con i punti della retta euclidea.

La grande rivoluzione, però, è costituita dalla creazione della teoria degli insiemi da parte di Cantor, che dà diritto di cittadinanza al concetto di infinito attuale in matematica, costruendo una geniale teoria dei numeri cardinali transfiniti. Uno dei più stupefacenti risultati di Cantor è la scoperta che gli "infiniti" non sono tutti uguali, anzi costituiscono una successione a loro volta infinita. La famosa *ipotesi del continuo*, formulata nel 1895, è la congettura che, in questa successione, non esista nessun cardinale transfinito compreso tra quello che corrisponde alla totalità dei numeri naturali e quello che corrisponde alla totalità dei numeri reali.

Tutte le culture umane sviluppano sistemi di numerazione, semplici o complessi che siano; il concetto di numerale si può considerare, nel linguaggio degli antropologi, un «universale umano». Tra i numeri stessi, le parole che li indicano e i simboli per rappresentarli sussistono rapporti spesso solo indiretti, che possono essere rivelatori di mentalità, concezioni filosofiche o credenze religiose caratteristiche della civiltà che usa quella lingua o impiega quel particolare sistema simbolico.

Usati nel commercio, connessi a pratiche religiose e divinatorie, necessari allo sviluppo di ogni ramo della scienza e della tecnologia, i numeri, nel corso dei secoli, hanno viaggiato da una cultura all'altra, continuamente trasformandosi. La forma circolare della cifra 0, introdotta dagli indiani, è stata forse modellata su quella della lettera *omicron*, che gli astronomi greci usavano come segnaposto con valore zero nella loro notazione sessagesimale, mutuata dalle fonti babilonesi? La notazione decimale posizionale, un'altra invenzione indiana, viene adottata dagli arabi e si diffonde nell'Europa latina attraverso il *Liber abaci* di Leonardo Fibonacci.

Per ovviare alle limitazioni della memoria e per facilitare operazioni lunghe e ripetitive, le diverse culture hanno escogitato, oltre a tecniche talvolta abbastanza sofisticate di calcolo digitale (usate, per esempio, nella civiltà romana), anche una varietà di strumenti di calcolo: rudimentali *tally sticks* diffusi in Inghilterra fino al XIX secolo, sassi (questo in origine il significato della parola *calculi*), gettoni, abaci.

La meccanizzazione del calcolo – resa possibile anche dallo sviluppo delle tecniche di orologeria a partire dall'alto medioevo – prende avvio all'inizio del XVII secolo con le macchine aritmetiche di Wilhelm Schickard e di Blaise Pascal. Nei trecento anni successivi si assiste all'invenzione di modelli sempre più perfezionati, fino alle meravigliose e luccicanti macchine costruite alla fine dell'Ottocento, all'epoca del massimo trionfo dell'ingegneria. L'era delle macchine di calcolo si chiude, bruscamente, con l'invenzione del computer, i cui principî generali e astratti di funzionamento sono fissati da Alan Turing e da John von Neumann e la cui realizzazione effettiva è resa possibile dalle nuove conquiste dell'elettronica. I computer, in quanto macchine logiche universali che eseguono programmi, rimangono fuori dall'orizzonte del nostro discorso.

Nel 1960 il fisico teorico di origine ungherese Eugene Wigner pubblicò un articolo, di carattere non specialistico, il cui titolo sintetizzava una delle più sorprendenti caratteristiche della scienza moderna: *L'irragionevole efficacia della matematica* (*The Unreasonable Effectiveness of Mathematics*). Il punto di partenza di Wigner – che nel 1963 sarà insignito del premio Nobel per i suoi contributi ai fondamenti e ai metodi della meccanica quantistica – è una domanda all'apparenza tanto ingenua quanto innocua: come mai la matematica si dimostra così utile per formulare le leggi della natura? In altri termini, che cosa hanno a che fare i numeri con la descrizione di fenomeni disparati quali la caduta delle mele, il movimento degli astri, la divisione cellulare, la dinamica delle popolazioni, l'interazione tra specie in un ecosistema?

La domanda di Wigner non è affatto ingenua, e dovrebbe farci riflettere – a un livello ben più elementare di quello della formulazione delle leggi di natura – sull'onnipresenza (e spesso l'invadenza) dell'elemento quantitativo nella nostre esistenze. A tutto associamo un numero – «ho il 42 di scarpe», «lo spread è a 245», «ho il colesterolo a 200» – anche senza aver chiaro se si tratti di percentuali o di misure, e senza preoccuparci di conoscere le leggi di distribuzione statistica o le unità di misura che sono sottintese e in molti casi non ovvie.

I numeri vanno conosciuti, se vogliamo poter fare a meno di loro.